Versuchsvorbereitung P1-12: Schwingungen, Resonanzverhalten

Michael Walz
Gruppe 10

25. November 2007

Inhaltsverzeichnis

V Vorwort

In diesem Versuch soll freie und erzwungene Schwingungen untersucht werden. Dabei werden über das Messwerterfassungssystem CASSY sowohl mechanische (Drehpendel) wie auch elektrische (Schwingkreis) Schwingvorgänge gemessen.

Die allgemeine Differentialgleichung für eine nicht erzwungene Schwingung lautet mit den Abkürzungen $\beta = \frac{\gamma}{2 \cdot \Theta}$ (γ ist der Dämpfungsterm) und $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta}}$:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Eine solche DGL lässt sich ganz einfach über den Ansatz $\varphi = e^{-\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) lösen. Wir erhalten folgenden Lösung und drei qualitativ verschiedene Fälle.

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\varphi(t) = e^{-\beta \cdot t}\left(A \cdot e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2} \cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2} \cdot t}\right)$$

Schwingfall ($\beta < \omega_0$): Der Normalfall einer Schwingung. Das System schwingt mehrmals um die Gleichgewichtslage, bis es auf Grund der Dämpfung in dieser zum Stillstand kommt.

Als Lösung erhalten wir mit $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ einen Term der Form:

$$\varphi(t) = \underbrace{C \cdot e^{-\beta \cdot t}}_{\text{Amplitude der Sinusfunktion}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Daran erkennt man, dass das Amplitudenmaximum exponentiell abnimmt.

Kriechfall ($\beta > \omega_0$): Die Dämpfung ist so stark, dass die Nulllage (theoretisch) nie erreicht wird. Das System nähert sich mit exponentiell abnehmender Geschwindigkeit dem Nullpunkt an.

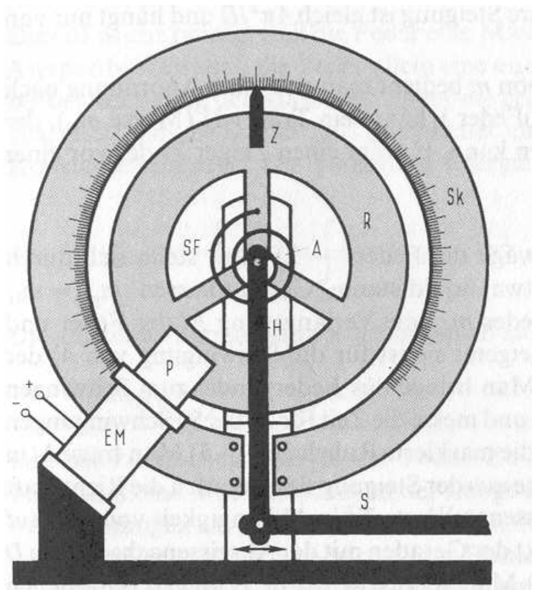
aperiodischer Grenzfall ($\beta = \omega_0$): Grenzfall zwischen Kriech- und Schwingfall. Das System schwingt nicht über den Nullpunkt hinweg. Allerdings wird der Nullpunktes wesentlich schneller als im Kriechfall erreicht.

1 Drehpendel, freie ungedämpfte Schwingung

In diesem ersten Versuch soll man sich mit dem Messwerterfassungssystem CASSY vertraut machen. Dazu wird der nahezu ungedämpfte Schwingvorgang eines Pohl'schen Rades betrachtet.

Ein Pohl'sches Rad besteht aus besteht aus einer Scheibe, die über eine Drehfeder in ihrem Mittelpunkt auf einer Achse geladert ist. Diese Drehfeder übt bei Auslenkung ein rücktreibendes Drehmoment aus, sodass eine harmonische Schwingung entsteht. Zusätzlich kann über eine Wirbelstrombremse[1] die Schwingung gedämpft werden. Wir betrachten im ersten Versuch die Schwingung ohne die Wirbelstrombremse. Etwas Dämpfung ist trotzdem zu erwarten, da Effekte wie beispielsweise Reibung an der Befestigung, Luftreibung, Reibung durch uns Messeinrichtung etc. auftreten.

In späteren Versuchen werden wir erzwungenden Schwingungen betrachtet, die bei unserem Pohl'schen Rad über einen Erregermotor erzeugt werden können.



aus: Wilhelm Walcher; Praktikum der Physik (8. Auflage); Teubner Verlag

Wir messen in diesem Versuch die Auslenkung des Pedelkörpers und müssen diesen in CASSY in das Bogenmaß umrechnen. Es sollen in CASSY folgenden Schaubilder erstellt werden:

- der Phasenwinkel und die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit

  Innerhalb von CASSY kann man eine man in diesen Diagramm eine Einhüllende eintragen. Diese Einhüllende fällt exponentiell ab. (vgl. oben)

- Phasenraumdiagramm ($\dot{\varphi}$ in Abhängigkeit von φ)

- der kinetische Energie in Abhängigkeit zur Zeit

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \dot{\varphi}^2$$

Das Trägheitsmoment Θ lässt sich leicht berechnen (Approximation eines Hohlzylindes der Höhe d mit den Radien r_a und r_i):

$$\rho = 8{,}96\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \qquad r_i = 7{,}5\,\text{cm} \quad r_a = 9{,}5\,\text{cm} \quad d = 0{,}2\,\text{cm}$$

$$\Theta = \int_M r^2 dm = \rho d \int_V r^2 \cdot dV = 2\pi\rho d \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = \frac{1}{2} \cdot \pi\rho d(r_a^4 - r_i^4)$$

$$\Theta = 14000\,\text{g} \cdot \text{cm}^2 = 1{,}40 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Nun soll die Schwingung mit Dämpfung der Wirbelstrombremse (konkret $I_B = 100$ / 200 / 400 / 700 mA) gemessen werden und mit CASSY die Winkel-Zeit-Diagramme aufgenommen werden. Ebenso soll experimentell die Stromstärke ermittelt werden, bei der die Grenzdämpfung auftritt. Die Dämpfungskonstante β kann wieder über die Einhüllenden von CASSY bestimmt werden. Wir sollen aber zum Vergleich auch die Formel $\beta = \frac{\ln(k)}{T}$ heranziehen. Dazu messen wir in über n Schwingungen und erhalten:

$$T = \frac{T_{\text{ges}}}{n} \qquad k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$$

Die Berechnung im das arithmetische Mittel hat zum Vorteil, dass hier der Fehler der Einzelmessung weniger stark wiegt, als bei der Methode über den Quotienten von nur zwei Messwerten.

Wie oben gezeigt gilt bei der gedämpften Schwinung:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

Unter Beachtung, dass $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ ist, erhalten wir für die Periodendauer der gedämpfen Schwingung:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}}$$

Da beim nur leicht gedämpften Schwingfall $\frac{\beta}{\omega_0} \ll 1$ gilt, wächst die Periodendauer im Vergleich zum ungedämpften Fall nur noch *minimal* an! Da die Periodendauer T damit praktisch unabhängig von der Dämpfung über die Wirbelstrombremse ist, hängt T auch nicht von I_B ab.

Die korrigiert Dämpfungskonstante β_{korr} soll nur graphisch aufgetragen werden. β_{korr} wurde um den Dämpfungsterm der ungedämpften Schwingung korrigiert, sodass nur noch die zusätzliche Dämpfung durch die Wirbelstrombremse enthalten ist.

$$\beta_{\text{korr}} = \beta - \beta_0$$

Die Dämpfung ist proportional zur Energie, die in der Wirbelstrombremse umgesetzt wird.

$$\beta_{\text{korr}} \propto P_{\text{Bremse}} = U \cdot I_B = R \cdot I_B^2 \qquad \Rightarrow \beta_{\text{korr}} \propto I_B^2$$

Das Verhältnis von Schwingungsenergie zum Energieverlust bezeichnet man als Gütefaktor:

$$Q = 2\pi\frac{\text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{2\pi \cdot \varphi_{\max}^2(t)}{\varphi_{\max}^2(t) - \varphi_{\max}^2(t+T)} = \frac{2\pi \cdot e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}}$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} \overbrace{\underbrace{\approx}_{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}}^{\beta T \ll 1} \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\beta T \pm \ldots)} = \frac{\omega}{2\beta}$$

3 Drehpendel, Winkelrichtgröße D^*

Nun soll die Winkelrichtgröße D^* im statischen Fall bestimmt werden.

$$D^* \cdot \varphi = M = F \cdot r$$

Wir könnten also am äußerden Ring des Pohl'schen Rads mit einem Faden o.ä. über eine Federmesser ziehen und dann die Winkelauslenkung messen. Dann ergibt sich D^* zu:

$$D^* = \frac{F \cdot r}{\varphi}$$

Wir können das Trägheitsmoment Θ aus D^* und der Periodendauer der ungedämpften Schwingung berechnen.

$$\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta} \qquad \Rightarrow \qquad \Theta = \frac{D^*}{\omega_0^2} = \frac{D^* \cdot T_0^2}{4\pi^2}$$

4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

Bei diesem Versuch soll die Resonanzkurve von erzwungenden Schwingungen bei verschiedener Dämpfung ($I_B = 200\ /\ 400\,\text{mA}$) registriert werden. Dazu müssen wir verschieden Frequenzen über CASSY einstellen, und zwar so, dass die Abtastung in Ressonanznähe feiner ist. Dazu verwenden wir eine etwas kompliziertere Formel aus der Vorbereitungshilfe[2].

Für die Amplitute A und die Phasenverschiebung ψ zur Erregerfrequenz

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Mit der Aperaturkonstanten k: $\quad k = \dfrac{M_0}{\theta}$

Die Phasenverschiebung ist gering (nahe 0) für kleine Ω, sie ist $-\frac{\pi}{2}$ für $\Omega \approx \omega_0$ und sie geht gegen $-\pi$ für große Ω. Die Amplitude wir bei $\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ maximal.[3]

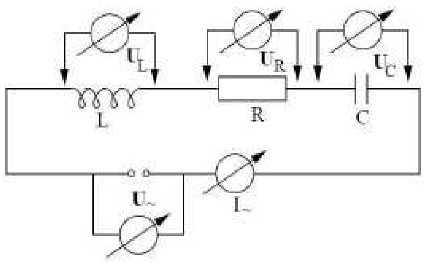
Über die Bandbreite $\Delta\omega \approx 2\beta$ kann ebenfalls die Güte bestimmt werden.

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$\Delta\omega$ ist die Differenz der beiden Frequenzen, bei denen die Amplitude $A = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$ beträgt.

5 Schwingkreis, erzwungene Schwingung

Nun wird ein elektrischer Schwingkreis nach gebenstehenden Schema aufgebaut unt untersucht. Die Spannungsquelle wird von CASSY direkt gestellt, womit CASSY auch gleich den Spannungs und Stromwert kennt.



Nach Kirchhoff gilt:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L \cdot \dot{I} + R \cdot I + \frac{\overbrace{Q}^{\int I\ dt}}{C}$$

Durch differenzieren erhalten wir eine Differenzialgleich für eine erzwungende Schwingung:

$$\frac{\dot{U}}{L} = \ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} I$$

Durch ein Vergleich mit den mechanischen Schwingungsgleichungen erhalten wir ($\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$:

Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingfalls: $\quad f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} \cdot \dfrac{1}{2\pi} = 1320\,\text{Hz}$

[2] Vorbereitungshilfe; Das CASSY Messsystem; dritte Seite unten

[3] Dies erhält durch Nullstellenbestimmen der Ableitung von A nach Ω

$$\text{Eigenfrequenz:} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\text{Phasenverschiebung:} \qquad \psi = \arctan\left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}\right)$$

Amplitude vom Strom: $I_0 = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}$ (k muss entsprechend angepasst werden.)

Daraus folgt der Scheinwiderstand, die Impedanz:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} \qquad I_0 = \frac{U_0}{Z}$$

Ebenso wie bei der Mechanik kann wieder die Güte des Schwingkreises über die Breite bei $I = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ bestimmt werden. Im Resonanzfall können die Spannungen am Spule und Kondensator die Quellspannung deutlich übersteigen. Dies nennt man Spannungsüberhöhung, woraus sich ebenfalls die Güte Q bestimmen lässt:

$$Q = \frac{|U_L(\omega)|}{U_0} = \frac{|U_C(\omega)|}{U_0}$$